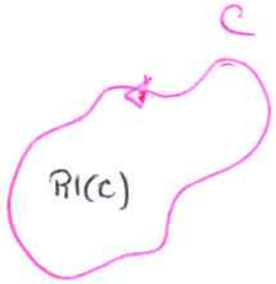
TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT

Sea f holomorfa sobre un contorno cerrado simple C, $z(t)$, $t \in [a,b]$, positivo, y en el recinto interior de C

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b u\,dx - v\,dy + i\int_a^b v\,dx + u\,dy$$



P, Q C^1 en C y en $RI(C)$

$$\left(\text{Green: } \int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{RI(C)} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy\right)$$

Si f' es continua, u y v son C^1.

$$\int_C f(z)\,dz = \iint_{RI(C)} (-v'_x - u'_y)\,dx\,dy + i\iint_{RI(C)} (u'_x - v'_y)\,dx\,dy.$$

Por ecuaciones de C-R: $u'_x - v'_y = 0$

$-v'_x - u'_y = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\int_C f(z)\,dz = 0}$$

(Esta es una linda manera de demostrarlo, aplicando teorema de Green, y con la hipótesis de continuidad de f'. Luego se demostró que esa hipótesis no es necesaria: es decir, el teorema se demostró sin esa hipótesis.)

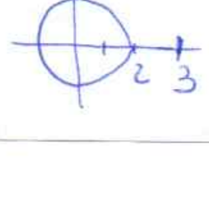
Teorema de Cauchy-Goursat: Sea f holomorfa sobre un contorno cerrado simple C y en el recinto interior de C.

Entonces:
$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

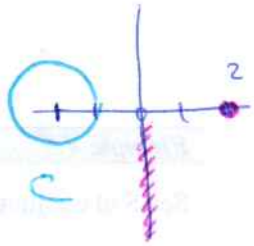
Ejemplos

1. $\displaystyle\int_C z^n\,dz = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, C: cualquier contorno cerrado simple.

2. $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-3}\,dz = 0$ $\quad C: |z| = 2$



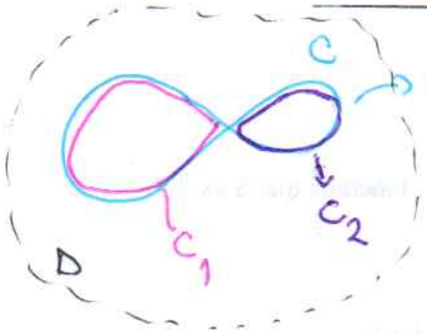
③ $\displaystyle\int_C \frac{\sqrt{z}}{z-2}\,dz = 0$ $\qquad C : |z+2| = 1$



$\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$

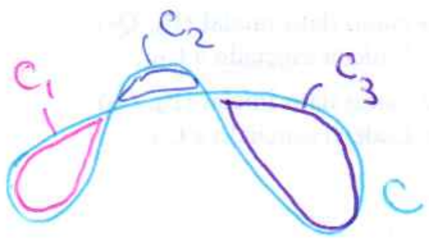
$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$f(z) = \dfrac{\sqrt{z}}{z-2}$ es holo en C y en $RI(C)$



si f holo en D y en el interior de toda curva cerrada en D:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0 + 0 = 0$$



$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

Teorema: si f es holomorfa en dominio D simplemente conexo D

entonces $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$

para todo contorno cerrado C contenido en D.

Obs: al ser D simplemente conexo, el recinto interior de cualquier ~~curva~~ contorno cerrado simple está contenido en D $\Rightarrow$ quedo asegurado que f es holomorfa en recinto interior.

Obs: orientación de contornos cerrados no simple:

NO TIENE SENTIDO HABLAR DE ORIENTACION POSITIVA O NEGATIVA

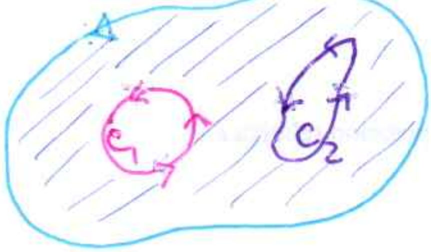
NO existe el recinto interior de un contorno cerrado no simple.

Obs: f holo en D simplemente conexo $\Rightarrow \int_C f(z)dz = 0$ para cualquier contorno cerrado C

$\Rightarrow$ f tiene primitiva en D!

Corolario: si f es holomorfa en un dominio D simplemente conexo D $\Rightarrow$ tiene primitiva en D.

Extensión del teorema de Cauchy Goursat



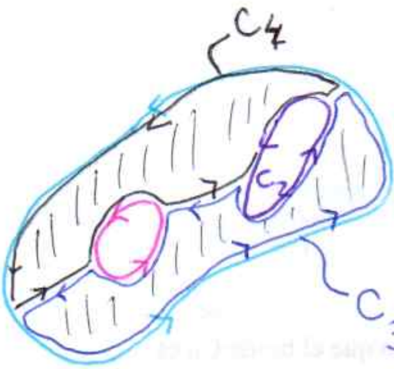
Sea f holomorfa en $RI(C) \cap RE(C_1) \cap RE(C_2)$ y sobre las curvas C, C1 y C2

con C, C_1, C_2: contornos cerrados simples

con $C_1 \subset RI(C)$

$C_2 \subset RI(C)$

C, C_1, C_2: positivamente orientados (como en fig)



Sean C_4 y C_3 como en fig.

f holo en C_j y en $RI(C_j)$ $j=3,4$.

$$\int_{C_3} f(z)dz = 0 \quad \text{y} \quad \int_{C_4} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz = 0 = \int_C f(z)dz + \int_{-C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz$$

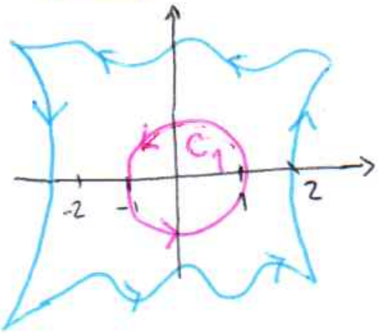
$$\Rightarrow \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

Teorema. Sea:

- C contorno cerrado simple positivamente orientado
- C_j $(j=1,2,\dots,n)$ contornos cerrados simples, positivamente orientados, interiores a C, y $C_j \subset RE(C_k)$ $(j \neq k)$
- f holomorfa en $RI(C) \cap RE(C_1) \cap RE(C_2) \dots \cap RE(C_k)$ y sobre las curvas C, C1, C2, ... Cn

Entonces: $$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)dz$$

Ejemplo: $f(z) = \frac{1}{z}$ C: contorno celeste.



$$\int_C f(z)\,dz = ?$$

f holomorfa entre C y C_1

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz = 2\pi i$$

ya calculado

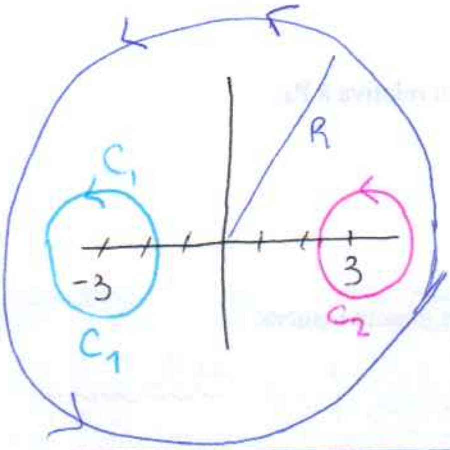
Ejemplo: $f(z) = \frac{1}{z^2-9}$ C: $|z| = R$, $R>0$, C positivamente orientado

si $R<3$ $\int_C \frac{1}{z^2-9}\,dz = 0$ porque $\frac{1}{z^2-9}$ holo en $|z|\le R$

si $R=3$: $\frac{1}{z^2-9}$ no es continua sobre C

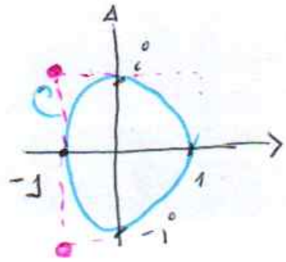
si $R>3$ $\int_C \frac{1}{z^2-9}\,dz = \int_{C_1} \frac{1}{(z-3)(z+3)}\,dz + \int_{C_2} \frac{1}{(z-3)(z+3)}\,dz$

C_1: $|z-3| = \frac{R-3}{2}$ C_2: $|z+3| = \frac{R-3}{2}$



(más tarde los calculamos...)

Ejemplo: $f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}$ C: $|z|=1$.



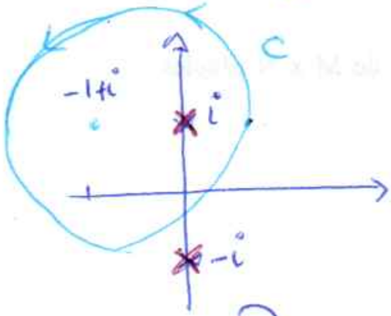
f es holomorfa en $\mathbb{C} - \{\underbrace{z : z^2+2z+2=0}\}$

$$z^2+2z+2=0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4.2}}{2} = -1 \pm i$$

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Ejemplo: $\int_C \frac{2z}{z^2+1}\,dz$ $\qquad C: |z+1-i| = \frac{3}{2}$ positivamente orient



$f(z) = \frac{2z}{z^2+1}$ no es holo en $z: z^2+1=0$

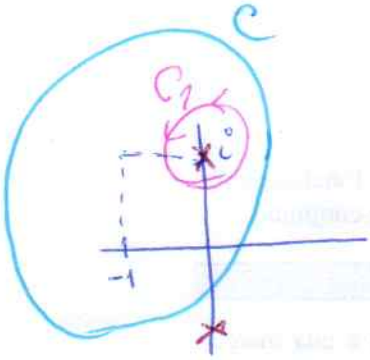
o sea: $z = i$
$z = -i$

$\Rightarrow$ f no es holo ~~...~~ en $RI(C)$

Pero... $f(z) = \frac{2z}{z^2+1} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z-i} \dots = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}$

$$\int_C \frac{2z}{z^2+1}\,dz = \int_C \underbrace{\frac{1}{z+i}}_{\text{es holo en } C \text{ y en } RI(C)}\,dz + \int_C \frac{1}{z-i}\,dz = 0 + \int_C \frac{1}{z-i}\,dz$$

Teo Cauchy-Goursat



Por ~~...~~ teorema derivado de Cauchy-Goursat:

$$\int_C \frac{1}{z-i}\,dz = \int_{C_1} \frac{1}{z-i}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{10}e^{it}} \cdot \frac{i}{10}e^{it}\,dt = *$$

$z = i + \frac{1}{10}e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$

$C_1: |z-i| = \frac{1}{10} \qquad z' = \frac{i}{10}e^{it}$

$$* = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{2z}{z^2+1}\,dz = 2\pi i$$

FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY

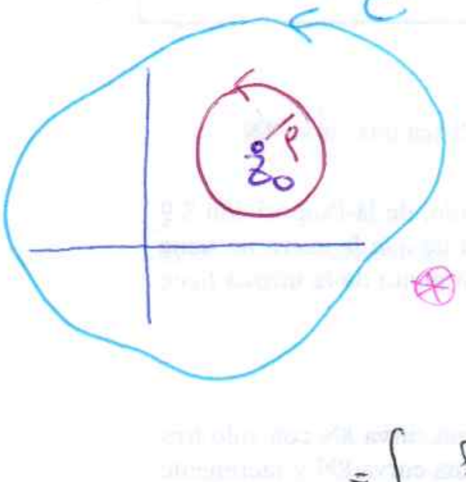
Sea f holomorfa en $C \cup RI(C)$, C: contorno cerrado simple, C: positivamente orientado.
$z_0 \in RI(C)$

Fórmula integral de Cauchy: $\boxed{\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)}$

Por qué? Veamos que $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0)$ es "chico"

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i\, f(z_0) = \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0)\cdot 2\pi i = (*)$$

↳ circ. de radio ρ en $RI(C)$, con centro z_0



Sabemos: $\int_{C_0} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$

$$(*) = \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0)\int_{C_0} \frac{1}{z-z_0}\,dz =$$

$$= \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \int_{C_0} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = \int_{C_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz.$$

Como f es holomorfa en $RI(C)$, si $z \sim z_0$ (si ρ es chico)

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \approx |f'(z_0)|$$

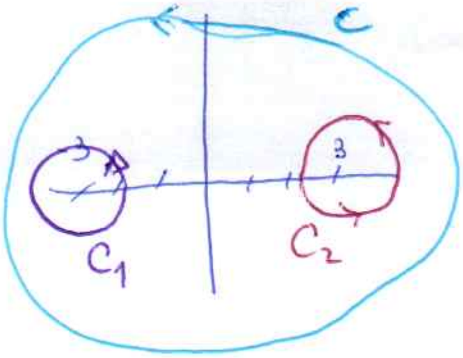
$$\left|\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0)\right| = \left|\int_{C_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \approx |f'(z_0)|\cdot 2\pi\rho$$

Como ρ puede ser tan chico como uno quiera:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i\, f(z_0) = 0$$

Ejemplo: $\int_C \frac{1}{z^2-9}\,dz \qquad C: |z| = R,\ R > 3$

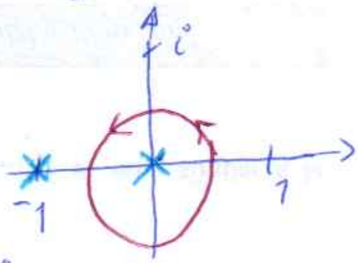
$$\int_C \frac{1}{z^2-9}\,dz = \int_{C_1} \frac{1}{(z-3)(z+3)}\,dz + \int_{C_2} \frac{1}{(z-3)(z+3)}\,dz =$$



$$= \underbrace{\int_{C_1} \frac{1/(z-3)}{z+3}\,dz}_{\substack{\text{Form. integral}\\ \text{Cauchy con}\\ f(z)=\frac{1}{z-3}\\ z_0=-3}} + \underbrace{\int_{C_2} \frac{1/(z+3)}{(z-3)}\,dz}_{\substack{\text{form. integ. de}\\ \text{Cauchy con}\\ f(z)=\frac{1}{z+3}\\ z_0=3}} =$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(-3-3)} + 2\pi i \frac{1}{(3+3)} = \frac{2\pi i}{-6} + \frac{2\pi i}{6} = 0$$

Ejemplo: $\int_C \underbrace{\frac{\cos(3z+\pi)}{z(z+1)}}_{\text{holo en } \mathbb{C}-\{0,-1\}}\,dz \qquad C: |z| = \frac{1}{2},\ +$



$$\int_C \frac{\cos(3z+\pi)/(z+1)}{z}\,dz = 2\pi i\,\frac{\cos(3\cdot 0+\pi)}{0+1} = -2\pi i$$

FIC con

$f(z) = \frac{\cos(3z+\pi)}{z+1} \rightarrow$ holo en $C \cup RI(C)$

$z_0 = 0$